ref : Gourdon

Développement : Réduction des endomorphismes normaux :

leçons 150, 153, 154, 160

Théorème : Soit E espace euclidien de dimension n, soit N l'ensemble des endomorphismes normaux de E. Pour $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$, on pose $N(a,b) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

Si $u \in N$, alors $\exists e$ une base orthonormée de E tq $\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_k & & \\ & & & N(a_{k+1}) & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & N(a_n) \end{bmatrix}$

où $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ et $a_{k+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.

Preuve :

Lemme 1 : Soit $u \in N$ et F un sev de E, stable par u. Alors $F^\perp$ stable par u.

preuve lemme :

Soit e une base orthonormée de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$.

Alors $\mathrm{mat}_e(u) = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} = M$.

u est normal et e orthonormale donc $\mathrm{mat}_e(u^*) = {}^tM$ et ${}^tM.M = M.{}^tM$.

D'où :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix} \overset{\begin{bmatrix} {}^tA & 0 \\ {}^tB & {}^tC \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} A{}^tA + B{}^tB & B{}^tC \\ C{}^tB & C{}^tC \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} {}^tA & 0 \\ {}^tB & {}^tC \end{bmatrix} \overset{\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} {}^tAA & {}^tAB \\ {}^tBA & {}^tBB + {}^tCC \end{bmatrix}}$$

On en tire $A{}^tA + B{}^tB = {}^tAA$, et en passant à la trace : $\mathrm{tr}(B.{}^tB) = 0$

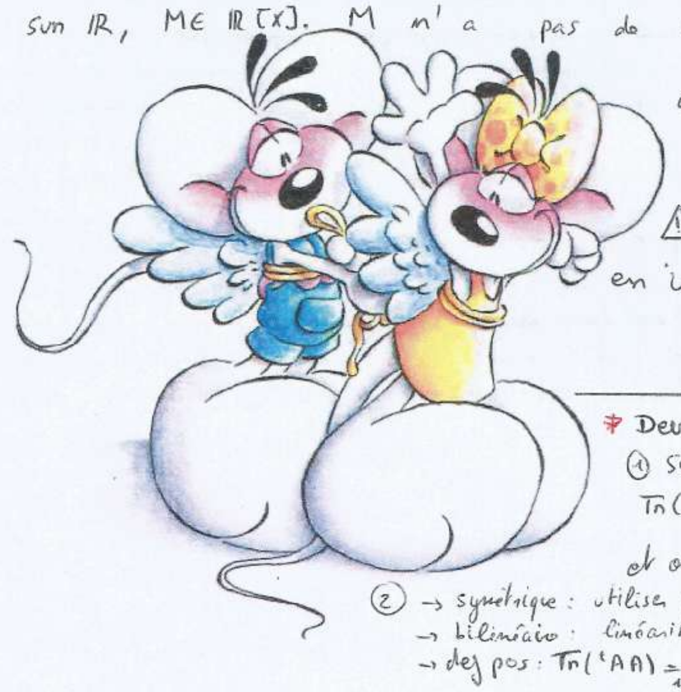
d'où $B = 0$: en effet, $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tA.B)$ est un produit scalaire*. ■

Lemme 2 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u n'a pas de valeurs propres (réelles), alors u admet un plan stable.

preuve lemme : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ sans valeurs propres. Soit M son polynôme minimal sur $\mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}[X]$. M n'a pas de racines réelles donc dans $\mathbb{R}[X]$, $M = PQ$

avec $\begin{cases} P \text{ irréductible unitaire de degré } 2 \\ Q \in \mathbb{R}[X]. \end{cases}$

⚠ Ce résultat provient de la décomposition en irréductibles des polynômes de $\mathbb{R}[X]$.



* Deux manières de le montrer :

① soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$.

$\mathrm{Tr}({}^tA.B) = \sum_{k=1}^{n} ({}^tA.B)_{k,k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} {}^ta_{kp} b_{pk} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} a_{pk} b_{pk}$

et on reconnait le produit scalaire canonique $= \sum_{1 \leq p,k \leq n} a_{pk} b_{pk}$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$!

② → symétrique : utiliser $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ et $\mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}(A)$.
→ bilinéaire : linéarité de la trace
→ déf pos : $\mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2 \geq 0$.

$Q(u) \neq 0$ (car $Q \mid M$ et M polynôme minimal) donc $\exists x \in E$ tq $Q(u)(x) = y \neq 0$. Posons $I = \{S \in \mathbb{R}[X] ; S(u)(y) = 0\}$. I est un idéal de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ est principal, donc il existe $R \in \mathbb{R}[X]$ unitaire tq $I = (R)$. On a $M(u) = 0 = P(u) \circ Q(u)$ donc $P(u)(y) = M(u)(x) = 0$, donc $P \in I$ et $R \mid P$. Or P irréductible donc $R = 1$ ou $R = P$.

Si $R = 1$, $I = \mathbb{R}[X]$ et $y = 0$: Absurde. Donc $(R) = (P)$.

Ainsi $F = \{ S(u)(y) ; S \in \mathbb{R}[X] \} \simeq \dfrac{\mathbb{R}[X]}{(P)}$ est un plan stable par u. ■

Preuve du théorème.

Nous allons faire une récurrence sur $n = \dim E$.

$\boxed{n=1}$ OK

$\boxed{n=2}$ * Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2 et $u \in N$ sans valeurs propres réelles.
Soit $\{e_1, e_2\} = e$ une base de E et $M = \operatorname{mat}_e(u) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

De la relation $\underset{\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}}{u^*} \circ u = u \circ \underset{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}{u^*}$, on obtient :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{bmatrix}$$

Donc $a^2 + b^2 = a^2 + c^2$, ainsi $b = \pm c$. De plus, M sans valeurs propres réelles donc M n'est pas symétrique (prop: une matrice symétrique possède des vp réelles)

Ainsi $b = -c$. D'où $ac - cd = -ac + cd \Rightarrow (a-d)c = c(d-a) \underset{b,c \neq 0}{\Rightarrow} d = a$

et ainsi $M = \begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix}$.

* Si $u \in N$ a une valeur propre $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, Soit v_1 un vecteur propre associé. $(\mathbb{R} v_1)^\perp$ est stable par u par le lemme 1 et pour $\mathbb{R} v_2 = (\mathbb{R} v_1)^\perp$, $\{v_1, v_2\}$ base orthonormée diagonalisant u.

$\boxed{\text{hérédité}}$

Soit E de dimension $n+2$ avec $n \geq 1$.

Soit $u \in N$.

* 1^{er} cas : u admet une valeur propre réelle λ_1.

On note $E_{\lambda_1}(u)$ l'espace propre associé à λ_1.

Soit e une base orthonormée adaptée à $E = E_{\lambda_1}(u) \oplus E_{\lambda_1}(u)^\perp$.

$u_{|E_{\lambda_1}(u)^\perp}$ est normal et par le premier lemme, c'est un endomorphisme.

L'hypothèse de récurrence s'applique.

* $2^{ème}$ cas : u n'admet pas de valeur propre réelle :

Alors soit F un plan stable donné par le lemme 2, $E = F \oplus F^\perp$.

On a $F^\perp$ stable par u (par le lemme 1) donc $u_{|F^\perp}$ est un endomorphisme normal et l'hypothèse de récurrence s'applique.

Appli : Une matrice symétrique réelle est diagonalisable

Question du jury :

(a) Montrez que toute matrice réelle symétrique possède des valeurs propres réelles :

Soit M réelle symétrique, λ vp de M, X $\vec{vp}$ associé à λ.

Soit $\langle \cdot , \cdot \rangle$ le produit hermitien usuel sur $M_{n,1}(\mathbb{C})$ défini par $\langle A , B \rangle = {}^t\bar{A} . B$. Par symétrie de M,

$$\langle MX , X \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{symétrie}}}{=} \langle X , MX \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{p.s. hermitien}}}{=} \overline{\langle MX , X \rangle}$$

et $\begin{cases} \langle MX , X \rangle = \lambda . \|X\|^2 \\ \overline{\langle MX , X \rangle} = \bar{\lambda} . \|X\|^2 \end{cases}$ donc $\lambda = \bar{\lambda}$.